



## Komplekse tal og astrofysik

**Givet:** Polynomium  $p \in \mathbb{C}[x]$  med grad  $\deg(p) = n$  og  $m \in \mathbb{N}$  med  $1 \leq m \leq n - 1$ .  
**Spørgsmål:** Hvor mange  $z \in \mathbb{C}$  opfylder  $p(z) = \bar{z}^m$ ?



Siger algebraens fundamentalsætning da ikke, at  $\bar{z}^m - p(z) = 0$  har præcis  $n$  nulpunkter?\*



\*Sætningen siger: Et polynomium  $p \in \mathbb{C}[x]$  har  $\deg(p)$  mange komplekse nulpunkter. Nulpunkter kan også forekomme flere gange.

Prøv at se her ... D. Khavinson og G. Świątek<sup>(1)</sup> viste i 2002, at  $p(z) = \bar{z}$  har højst  $3n - 2$  løsninger, hvis  $p \in \mathbb{C}[x]$  grad  $n \geq 2$  har.

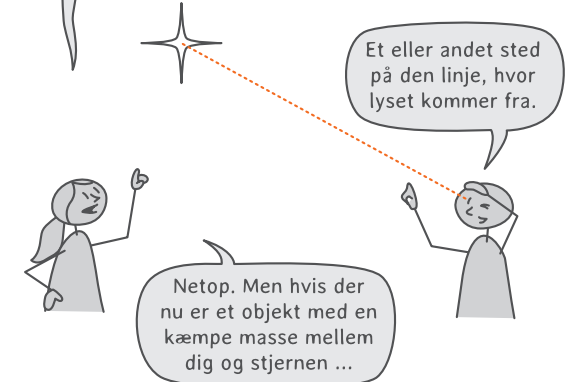
Og i 2006 beviste D. Khavinson og G. Neumann<sup>(2)</sup>, at  $p(z)/q(z) = \bar{z}$  har højst  $5n - 5$  løsninger, hvis  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  er indbyrdes primiske, og der gælder  $n = \max\{\deg(p), \deg(q)\} \geq 2$ .



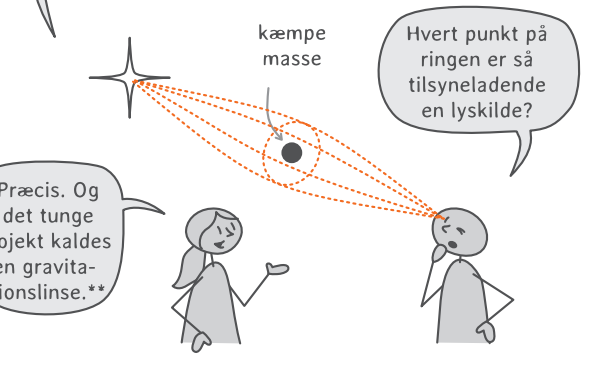
Nej, slet ikke: Resultatet fra før løser det astrofysiske spørgsmål, hvor mange lyskilder der tilsyneladende genereres af gravitationslinser.



Du kigger på denne stjerne. Hvor ligger den?

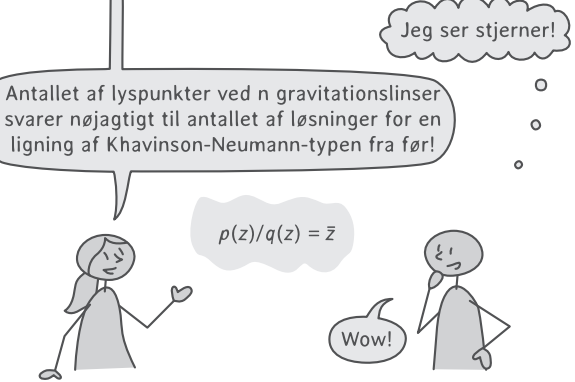


... afbøjes lyset på grund af gravitation. Så ser du en lysring omkring den egentlige stjerne.\*



\*Ringene kaldes Einsteinringe, se også (www1). \*\*Se (www2). Smukke billeder af gravitationslinser findes på Hubble-teleskopets webside (www3).

Noget mere indviklet bliver det, hvis lyset afbøjes af flere masser. Så ser man ikke længere lysringe, men flere enkelte lyspunkter.



Ud fra det, du lige har sagt, ser jeg ved  $n$  masser højst  $5n - 5$  lyspunkter.



Nej, slet ikke. Da Khavinson og Neumann skrev deres artikler, anede de ikke, at deres forskning er vigtig for astrofysikken!\*



\*Se (www4).

Og hvad så med dit oprindelige problem?



### + Videre læsning

D. Khavinson, G. Neumann: *From the Fundamental Theorem of Algebra to Astrophysics: A "Harmonious" Path*. Notices of the American Mathematical Society, vol. 55, nr. 6 (2008).

### + Weblinks

- (www1) [https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_ring](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_ring)
- (www2) [https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational\\_lens](https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_lens)
- (www3) NASA HubbleSite: *Picture Album: Exotic: Gravitational Lens*. Space Telescope Science Institute, Baltimore, USA. [http://hubblesite.org/gallery/album/exotic/gravitational\\_lens/](http://hubblesite.org/gallery/album/exotic/gravitational_lens/)
- (www4) American Mathematical Society: *Where Mathematics and Astrophysics Meet*. ScienceDaily (06.06.2008). <http://www.sciencedaily.com/releases/2008/06/080605181158.htm>

### + Matematiske artikler

- (1) D. Khavinson and G. Świątek: *On the number of zeros of certain harmonic polynomials*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 131, nr. 2 (2003), s. 409-414.
- (2) D. Khavinson and G. Neumann: *On the number of zeros of certain rational harmonic functions*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 134, nr. 4 (2006), s. 1077-1085.
- (3) S. H. Rhie: *Can A Gravitational Quadruple Lens Produce 17 images?* ArXiv.org (2001). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0103463>

