

Vorschau
komplette Broschüre unter
<http://www.project-map.eu/go/comics-de>

Komplexe Zahlen und Astrophysik

Gegeben:
Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ mit Grad $\deg(p) = n$
und $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n-1$.
Frage:
Wie viele $z \in \mathbb{C}$ erfüllen $p(z) = \bar{z}^m$?

Hm ... Wie viele Lösungen hat die Gleichung nur ... $5n$? Nein.
Ist das denn so schwer?

Sagt der Fundamentalsatz der Algebra nicht, dass $\bar{z}^m - p(z) = 0$ genau n Nullstellen hat?*

Leider nein. In dieser Gleichung taucht neben z auch die konjugierte Zahl \bar{z} auf, das macht es viel komplizierter.

Oh, stimmt. Die Gleichung $\bar{z} - z = 0$ wird ja auch von allen Zahlen aus \mathbb{R} erfüllt, nicht nur von einer.

*Der Satz sagt: Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ hat $\deg(p)$ viele komplexe Nullstellen. Dabei können Nullstellen mehrfach auftreten.

Schau mal ... D. Khavinson und G. Swiatek⁽¹⁾ zeigten 2002, dass $p(z) = \bar{z}$ höchstens $3n - 2$ Lösungen hat, wenn $p \in \mathbb{C}[x]$ Grad $n \geq 2$ hat.

Mehr als n , aber endlich viele.

Und 2006 bewiesen D. Khavinson und G. Neumann⁽²⁾, dass $p(z)/q(z) = \bar{z}$ höchstens $5n - 5$ Lösungen hat, wenn $p, q \in \mathbb{C}[x]$ teilerfremd sind und $n = \max\{\deg(p), \deg(q)\} \geq 2$ gilt.

Äh, klingt gut. Und sehr abstrakt ...

Oh, gar nicht: Das Resultat von eben löst die astrophysikalische Frage, wie viele scheinbare Lichtquellen durch Gravitationslinsen erzeugt werden!

Du sprichst in Rätseln!

Ich erkläre es Dir.

Du siehst diesen Stern an. Wo liegt er?

Na, irgendwo auf der Linie, von wo das Licht kommt.

Genau. Aber wenn ein Objekt mit einer riesigen Masse zwischen Dir und dem Stern ist ...

... wird das Licht durch Gravitation abgelenkt. Du siehst dann einen Lichtring um den eigentlichen Stern.*

riesige Masse

Jeder Punkt auf dem Ring ist dann eine scheinbare Lichtquelle?

Exakt. Und das schwere Objekt heißt Gravitationslinse.**

*Diesen nennt man Einsteinring, siehe auch (www1). **Siehe (www2).
Schöne Bilder von Gravitationslinsen findet man auf der Webseite des Hubble-Teleskops (www3).

Komplizierter wird's, wenn mehrere Massen das Licht ablenken. Dann sieht man nicht mehr Lichtringe, sondern mehrere einzelne Lichtpunkte.

Ich sehe Sterne!

Die Zahl der Lichtpunkte bei n Gravitationslinsen entspricht dabei genau der Zahl der Lösungen einer Gleichung des Khavinson-Neumann-Typs von eben!

$p(z)/q(z) = \bar{z}$

Wow!

Nach dem, was Du eben gesagt hast, sehe ich bei n Massen höchstens $5n - 5$ Lichtpunkte.

So ist es. Dass genau $5n - 5$ Lichtpunkte möglich sind, hatte die Astrophysikerin Rhie⁽³⁾ schon 2001 durch ein Beispiel gezeigt.

Dann arbeiteten Rhie, Khavinson und Neumann sicher zusammen.

Nein, gar nicht. Khavinson und Neumann wussten sogar beim Verfassen ihrer Arbeit nicht, dass ihre Forschung in der Astrophysik wichtig ist!

Das ist ein Beispiel dafür, dass sich abstrakte mathematische Forschungsergebnisse manchmal erst im Nachhinein als nützliche Werkzeuge für Anwendungen herausstellen.

*Siehe (www4).

Und was ist mit deinem Problem vom Anfang?

Das ist eine noch ungelöste Verallgemeinerung der Frage von Khavinson und Neumann.

Dann viel Erfolg beim Nachdenken - vielleicht löst Du auch ein Rätsel der Astrophysik!

+ Zum Weiterlesen
D. Khavinson, G. Neumann: *From the Fundamental Theorem of Algebra to Astrophysics: A "Harmonious" Path*. Notices of the American Mathematical Society, Vol. 55, Nr. 6 (2008).

+ Weblinks
(www1) <https://de.wikipedia.org/wiki/Einsteinring>
(www2) <https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationslinseneffekt>
(www3) NASA HubbleSite: *Picture Album: Exotic: Gravitational Lens*. Space Telescope Science Institute, Baltimore, USA. http://hubblesite.org/gallery/album/exotic/gravitational_lens/
(www4) American Mathematical Society: *Where Mathematics and Astrophysics Meet*. ScienceDaily (06.06.2008). <http://www.sciencedaily.com/releases/2008/06/080605181158.htm>

+ Mathematische Artikel
(1) D. Khavinson and G. Świątek: *On the number of zeros of certain harmonic polynomials*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 131, Nr. 2 (2003), S. 409-414.
(2) D. Khavinson and G. Neumann: *On the number of zeros of certain rational harmonic functions*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 134, Nr. 4 (2006), S. 1077-1085.
(3) S. H. Rhie: *Can A Gravitational Quadruple Lens Produce 17 images?* ArXiv.org (2001). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0103463>

Impressum. Die Broschüre „Themen+Trends der Mathematik“ wurde im Rahmen des Projektes „MaP – Mathematik mit Perspektive“ erstellt, welches durch das Programm INTERREG4A vom Europäischen Fonds für regionale Entwicklung finanziert wurde. Die Verantwortung für den Inhalt liegt beim Herausgeber. Die vorliegenden Texte wurden sorgfältig recherchiert, der Herausgeber übernimmt jedoch keine Verantwortung für Richtigkeit und Vollständigkeit. **Herausgeber:** „MaP – Mathematik mit Perspektive“, Arbeitspaket 6 (Teilprojektleiterin: Barbara Langfeld, CAU zu Kiel). **Konzeption, Design, Redaktion:** Barbara Langfeld;

MaP-Designmanual: Karin Vierk, Emanuel Kaiser (IPN Kiel). **Inhaltliche Beratung:** Simon Albrecht (Kiel), Gennadiy Averkov (Magdeburg), Justus Lasse Berger (Kiel), Rudolf Berghammer (Kiel), Walter Bergweiler (Kiel), Steffen Börm (Kiel), Malte Braack (Kiel), Christoph Duchhardt (Kiel), Jens Heber (Kiel), Aiso Heinze (Kiel), Michael Ritter (München), Martin Scheffel (Kiel), Marek Wysocki (Kiel). **Text, Recherche:** Margaretha Franck, Paul Hein, Barbara Langfeld. **Layout:** Margaretha Franck, Paul Hein, Barbara Langfeld, Yannik Potdevin, Neele Schnaars. **Übersetzung vom Deutschen ins Dänische:** Hans-Otto Rosenbohm (Odense).

2. Auflage, 2014. Urheber ist „MaP – Mathematik mit Perspektive“, Arbeitspaket 6, im Einzelnen die oben gelisteten Personen. Dieses Werk steht unter einer Creative Commons Namensnennung-NichtKommerziell-KeineBearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>